Monsieur G. Darboux
de la part
des éditeurs

QUATRE MODÈLES

REPRÉSENTANT

DES SURFACES DÉVELOPPABLES

AVEC DES RENSEIGNEMENTS

SUR LA

CONSTRUCTION DES MODELES ET SUR LES SINGULARITÉS QU'ILS REPRÉSENTENT

PAR

V. MALTHE-BRUUN ET **C. CRONE**

INGÉNIEUR CIVIL CAND. MAG.

AVEC QUELQUES REMARQUES SUR LES SURFACES DÉVELOPPABLES
ET SUR L'UTILITÉ DES MODÈLES

PAR

M. le Dr H. G. ZEUTHEN

COPENHAGUE

ANDR. FRED. HÖST ET FILS, LIBRAIRES-ÉDITEURS

PARIS. — J. BAUDRY, rue des Saints-Pères, 15

LEIPZIG. — BERNHARD-HERMANN

1877

RENSEIGNEMENTS

SUR LA

CONSTRUCTION DES MODÈLES

ET SUR

LES SINGULARITÉS QU'ILS REPRÉSENTENT

Toutes les tables de carton doivent être tranchées le long de toutes les lignes tracées sans interruptions. Dans la description des différents modèles, nous indiquerons les bords le long desquels les pièces de carton doivent être collées ; on les collera le plus facilement de la manière suivante : on place l'une des deux pièces de carton qui doivent être collées sur du papier (1), et on trace avec un crayon, sur le papier, le bord le long duquel les cartons doivent être joints. On coupe ensuite le papier en suivant deux courbes parallèles et passant chacune d'un côté de celle qu'on vient de tracer à la distance d'environ 6 millimètres ; la bande ainsi produite doit être gommée et appliquée ensuite sur une des pièces de carton, de manière que le

(1) Si l'on se sert de papier, on doit choisir du papier transparent, afin que les courbes tracées sur les modèles ne soient pas cachées.

Il vaut mieux employer du lin, qui ne se déchire pas si facilement, quand on manie les modèles ; si le lin n'est pas transparent, on doit y tracer les courbes qui sont cachées.

On emploiera avec profit le lin ou le papier dont on se sert pour calquer.

bord du carton et la courbe tracée sur le papier se confondent. Si le bord du carton n'est pas rectiligne, la partie libre de la bande doit être coupée suivant des droites normales au bord, de façon qu'elle soit divisée en dents d'une épaisseur d'environ 6 millimètres. Puis on place l'autre pièce de carton sur la première dans sa juste position, et enfin on plie la partie libre de la bande de papier sur la pièce de carton supérieure, après avoir gommé celle-ci; alors le papier réunira les deux pièces de carton, comme le dos d'un livre les deux parties du cartonnage. Les modèles, ainsi construits, représenteront la surface développée. Quant à la manière dont il faut manier les modèles, afin qu'ils représentent la surface non développée, des renseignements seront donnés dans la description des différents modèles. Ici, nous nous bornerons à la remarque, qu'il faut prendre soin, que les génératrices tracées sur les modèles se montrent autant que possible comme des lignes droites.

Les modèles sont marqués par les numéros I-IV, et sur toutes les pièces de carton appartenant à un même modèle est imprimé le numéro de celui-ci. Pour rendre plus facile la description des modèles II-IV, les différentes pièces de carton appartenant à un de ces modèles sont marquées par différentes lettres.

Les pièces appartenant au modèle I sont deux zones circulaires congruentes qui se couvrent, quand la surface est développée; elles doivent être collées le long du cercle intérieur, de manière que les rayons le long desquels elles sont coupées se confondent, et que les côtés des zones circulaires sur lesquels est imprimé le numéro I soient tournés tous les deux en dehors ou en dedans. Si l'on tient le modèle de manière que le cercle intérieur forme à peu près une hélice, et que les zones circulaires se séparent, le cercle intérieur représentera l'arête de rebroussement d'une surface développable, tandis que les deux zones circulaires représenteront les deux nappes de la surface. Le modèle obtiendra plus facilement cette figure si l'on fait passer un fil entre les deux zones circulaires, le long du cercle intérieur, en éloignant ensuite les deux extrémités l'une de l'autre dans des directions perpendiculaires au plan des zones circulaires. Le modèle montre des exemples de courbes sur une surface développable, qui coupent l'arête de rebroussement en plusieurs points coïncidants.

Les lignes ——— ... ——— ... ——— et — — — — — — — — sont respectivement une génératrice et une courbe ayant deux points coïncidants communs avec l'arête de rebroussement; la génératice et la courbe passent toutes les deux d'une nappe de la surface à l'autre. La courbe —— . —— . —— . —— a quatre points coïncidants communs avec l'arête de rebroussement, et elle demeure sur la même nappe. La surface étant appliquée sur un plan, les courbes nommées auront toujours un contact de premier et de troisième ordre avec l'arête de rebroussement développé. Une courbe tracée sur la surface développée qui coupe l'arête de rebroussement, ou qui a avec cette courbe un contact d'ordre pair, doit au contraire, si elle ne s'arrête pas brusquement, avoir un point de rebroussement de première (ɔ: un point de rebroussement ordinaire) ou de seconde espèce respectivement. Cette remarque s'appliquera aux courbes . —— . —— dont sur la surface développée l'une coupe l'arête de rebroussement, tandis que l'autre a avec cette courbe un contact de second ordre.

Le modèle II est composé de deux zones circulaires *a* et *b*, dont les cercles intérieurs ont des rayons égaux, les cercles extérieurs des rayons différents; elles sont toutes les deux coupées le long d'un rayon; dans *a* une fente un peu courbée est coupée du bord intérieur à une longueur un peu plus grande que la différence des deux rayons de *b*. On fait passer *b* par la fente, et on le place de manière que les cercles intérieurs et les rayons le long desquels les zones circulaires sont découpées se confondent, et que les numéros, imprimés sur les deux zones circulaires, se montrent du même côté du modèle. Les zones circulaires sont collées le long des cercles intérieurs. Si l'on fait glisser un peu le cercle extérieur de *b* par la fente dans le sens indiqué par la flèche, le modèle représentera la singularité qui se présente, quand un plan osculateur de l'arête de rebroussement contient quatre

*

points consécutifs. Dans un point dont le plan osculateur remplit cette condition, la courbe double rencontre l'arête de rebroussement ; la ligne _ _ _ _ _ _ sur le modèle est tangente de l'arête de rebroussement dans un tel point, tandis que la courbe double est représentée par la fente dans *a*.

Les deux lignes ___ . . . ___ . . . ___ représentent deux génératrices ordinaires.

Les trois pièces *a*, *b* et *c*, du modèle III, doivent être situées de la manière suivante, quand le modèle est développé : Si la pièce *a* est placée de façon que le côté auquel est imprimée la lettre *a* soit tourné en haut, et que cette lettre se montre dans sa position naturelle, la pièce *c* doit être située de manière que l'on voie la lettre *c* dans sa position naturelle sur le côté tourné en haut, et que l'un des bords rectilignes de *c* touche dans toute sa longueur le bord rectiligne du cran coupé à gauche dans *a*; *c* est placé au-dessous de *a* du côté gauche de la fente dans *a*, mais par la fente elle passe par-dessus *a*, de manière que le bord courbé de *c* soit entièrement au côté supérieur de *a*. La pièce *b* enfin est située sur *a* et *c*, la lettre *b* tournée en haut, et les bords courbés de *b* se confondent avec les bords courbés de *a* et de *c*. Les pièces doivent être collées le long de ces bords courbés, et il faut en outre coller une bande de papier sur l'endroit, où les bords rectilignes de *a* et de *c* se touchent. Si l'on fait glisser un peu la pièce *c* par la fente dans *a* dans le sens indiqué par la flèche, le modèle représentera la singularité d'une surface développable qui naît, quand trois génératrices passent au même point, et que par conséquent l'arête de rebroussement a un point de rebroussement. Dans un tel point, la courbe double rencontrera l'arête de rebroussement et aura la même tangente ; en apparence, la courbe double s'arrête là, car les deux nappes qui se coupent dans son prolongement sont imaginaires. Cette singularité est réciproque à celle représentée par le modèle II. La ligne _ _ _ _ _ _ est la tangente du point de rebroussement ; les deux lignes ___ . . . ___ . . . ___ sont deux génératrices ordinaires.

Le modèle IV est composé de deux pièces *a* et *b*, dont chacune a la forme d'un rectangle à deux parties saillantes. On fait, avec un couteau, des incisions dans ces pièces le long des lignes — — — — — — — —, et puis on replie les parties de *a* et *b* marquées par *d* et *c* par-dessus les côtés respectifs de *a* et de *b* auxquels sont imprimés les numéros. On pourra aussi couper *a* et *b* le long des lignes — — — — —, et, après avoir placé *c* et *d* dans leurs justes positions sur *b* et *a*, les coller à ces pièces. Puis on place les pièces de manière que toutes les quatre lettres soient tournées en haut et se montrent dans leurs positions naturelles. La partie saillante de *a*, qui n'a pas été repliée, est placée au-dessous de *b* du côté droit de la fente dans *b*, mais passe par la fente du côté inférieur de *b* à gauche par-dessus *b*, tandis que la partie saillante de *b*, qui n'a pas été repliée, est placée au-dessous de *a* du côté gauche de la fente, mais passe par la fente du côté inférieur de *a* à droite par-dessus *b*. Le périmètre du modèle sera donc rectangulaire ; les bords courbés des deux parties saillantes de *a* et *b* qui n'ont pas été repliées et les bords courbés de *c* et de *d* doivent se confondre. Enfin, on colle les pièces le long de ces bords courbés. Si l'on fait glisser *a* et *b* par les fentes dans *b* et *a* dans les sens indiqués par les flèches, le modèle représentera la singularité d'une surface développable qui se présente, quand l'arête de rebroussement a une tangente d'inflexion ; cette tangente est aussi tangente d'inflexion de la courbe double au même point. La tangente d'inflexion est représentée, sur le modèle, par les lignes le long desquelles les parties *c* et *d* sont repliées ; l'arête de rebroussement et la courbe double sont représentées par les bords collés et par les fentes dans *a* et *b*. Les droites —— ... —— ... sont deux génératrices ordinaires.

Il a été bien difficile de lithographier les dessins sur les modèles de manière que les traces de la même courbe sur les deux côtés du carton se confondissent, en faisant pénétrer la lumière au travers du carton ; nous n'avons pas complétement surmonté cette difficulté, mais nous ne croyons pas l'inexactitude assez grande pour diminuer l'utilité des modèles. Les surfaces représentées par les modèles ne sont évidemment pas des surfaces à équations définies ; il faut regarder les modèles comme des représentations schématiques des différentes singularités. Nous laissons au lecteur la peine de découper et de coller les modèles, parce que nous croyons la construction des modèles elle-même très-instructive.

Dans la note suivante, que M. le docteur H.-G. Zeuthen a eu la bonté d'ajouter à notre œuvre, on trouvera une explication des singularités représentées et quelques remarques sur l'utilité des modèles.

Copenhague, juillet 1877.

REMARQUES

SUR

QUATRE MODÈLES EN CARTON

REPRÉSENTANT DES SURFACES DÉVELOPPABLES, CONSTRUITS
PAR MM. **CRONE** ET **BRUUN**

Par M. H. G. ZEUTHEN

On trouve, dans la troisième édition de la « *Geometry of three dimensions* », de M. Salmon, à la page 289 (1), la description d'un moyen très-simple de se procurer un modèle d'une surface développable. Le modèle, dont M. Cayley attribue l'invention à M. Blackburn, montre suffisamment les propriétés d'une surface développable dans le voisinage d'un point ordinaire de son arête de rebroussement, et présente immédiatement les règles dont on se sert dans la géométrie descriptive pour construire le développement de l'héliçoïde développable. Ayant appris, par l'excellent traité que je viens de citer, la construction de ce modèle, j'ai essayé de donner au même principe quelques nouvelles applications en dessinant, sur le même modèle, des courbes ayant avec l'arête de rebroussement des contacts de différents ordres, et en construisant de nouveaux modèles, assez rudimentaires,

(1) A la page 624 de la seconde partie de l'édition allemande de M. Fiedler.

représentant les principales singularités des surfaces développables. Ces modèles m'ont servi dans mes propres études, et j'en ai fait usage dans mes leçons. Je pouvais donc supposer qu'ils pourraient être utiles à d'autres aussi, s'ils se présentaient sous une forme mieux exécutée et si l'idée recevait certaines extensions. Je m'adressai donc à M. Crone, que je croyais plus capable que moi de réaliser la publication, et qui a montré par plusieurs recherches son habileté géométrique. M. Crone a saisi l'idée avec intérêt ; il lui a donné quelques extensions (notamment la construction du modèle IV de la collection), et, avec le concours de M. Bruun, il a bien voulu se charger de la publication des modèles, à condition que j'y ajouterais quelques remarques sur l'usage qu'on peut faire des modèles. C'est de cette obligation que je vais m'acquitter ici.

Les différentes lignes du modèle I représentent des courbes ayant, en des points ordinaires de l'arête de rebroussement, des contacts de différents ordres avec cette courbe. Une branche de courbe simple et complète qui se trouve sur la surface, et qui rencontre l'arête de rebroussement, aura toujours avec elle un nombre pair d'intersections confondues si, comme pour les courbes planes, on exprime par ce nombre l'ordre de la distance infiniment petite des deux courbes, en une distance de leur point de rencontre qui est infiniment petite du premier ordre. Suivant que ce nombre pair est un multiple de quatre ou non, la branche reste sur la même nappe ou passe d'une nappe à l'autre.

On peut démontrer (1) ces assertions, soit en regardant la surface comme la limite du polyèdre formé d'une suite discrète de plans, soit en prenant pour coordonnées d'un point de la courbe tangente à l'arête de rebroussement : 1° sa distance t, du point de contact de la génératrice sur laquelle il se trouve avec l'arête de rebroussement ; 2° la distance s, de ce point de contact à celui de la courbe. Alors, si la branche de courbe que nous discutons n'a pas un contact d'ordre supérieur avec la génératrice en son point de contact avec l'arête de

(1) On trouvera une autre démonstration dans mon *Mémoire sur deux surfaces dont les points se correspondent un à un*. (*Mathematische Annalen*, t. IV, p. 22.)

rebroussement, elle sera représentée, pour des petites valeurs de s et de t, par une série développée suivant des puissances entières et positives de s :

$$t = A\,s^{\alpha} + \ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

où le plus petit exposant $\alpha \gtreqless 1$. L'ordre de la distance infiniment petite du point (s, t) à l'arête de rebroussement étant le double de l'ordre de sa coordonnée t, on voit que $2\,\alpha$ est le nombre cherché d'intersections confondues ; ce qui est conforme aux règles énoncées ; car une altération du signe de t indique un passage d'une nappe à l'autre. Dans le cas d'exception, s s'exprime en fonction de t par une série semblable, de façon que le passage, demandé dans ce cas où il y a un contact simple, ait lieu.

De même que les branches simples, les branches doubles, dont la duplicité est due à celle de la surface le long de l'arête de rebroussement, présentent un intérêt particulier. Le cas le plus simple qui y appartient est celui d'une branche présentant, en son point de rencontre avec l'arête de rebroussement, un point cuspidal ordinaire et passant d'une nappe à l'autre. Cette branche peut être représentée par une équation de la forme (1) ou $A = \alpha = 1$. Dans les autres cas, nos branches doubles peuvent être représentées par des séries de la même forme dont les exposants sont des multiples de $\frac{1}{2}$. Le modèle contient une branche de courbe où $\alpha = \frac{3}{2}$. Dans les cas de ces branches doubles, le nombre d'intersections confondues dépend de la manière dont on regarde ces cas comme des limites.

On trouvera peut-être dans les théorèmes énoncés quelque chose de paradoxal. En effet on peut, par exemple, assez bien dessiner sur une nappe de la surface développée sur un plan une courbe ayant un contact simple avec l'arête de rebroussement, et cette courbe conservera cette propriété si l'on repasse de la surface développée à la surface développable. Oui ; mais ses deux parties qui se trouvent des deux côtés du point de contact auront alors cessé de former une seule branche de courbe; pour avoir une courbe décrite suivant une loi continue, il faut continuer l'une et l'autre de ces deux parties sur l'autre nappe, et l'on aura ainsi deux branches de courbe dont chacune a avec l'arête de rebroussement un contact simple, et passe d'une nappe à l'autre, conformément au théorème énoncé. Les droites, tangentes à l'arête de rebroussement développée, fournissent un bon exemple de la justesse de cette remarque.

Notre système de coordonnées peut servir aussi à l'étude de singularités supérieures, d'une courbe sur une surface développable, qui ont lieu en un point simple de l'arête de rebroussement, ou même en un point singulier de cette arête. On peut illustrer les résultats en dessinant les courbes sur le modèle I ou sur les autres modèles, qui représentent les principales singularités des surfaces développables. Nous regardons cette liberté d'introduire les nouvelles formes de courbes dont on aura à s'occuper comme un avantage essentiel des modèles. On voit sans difficulté qu'il est permis d'appliquer les résultats ici trouvés aux courbes cuspidales de surfaces non développables.

Tous ceux qui se sont occupés des mathématiques savent qu'une équation — $\varphi(x, y, z, \alpha) = 0$ — qui est du premier degré par rapport aux coordonnées x, y, z, et qui contient encore un paramètre variable α, représente un plan mobile ; que l'équation de la surface développable, enveloppe de ces plans, résulte de l'élimination de α des équations :

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0\,;$$

que celle de son arête de rebroussement résulte de l'élimination de α des équations :

$$\varphi = 0, \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0,$$

et qu'enfin les équations :

$$\varphi = 0, \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{d\alpha^3} = 0,$$

servent à déterminer les points de l'arête de rebroussement où passent quatre plans tangents consécutifs et trois génératrices consécutives de la surface, et que ces points sont des points cuspidaux de l'arête de rebroussement. Les géomètres connaissent encore le rôle important que jouent ces points dans les formules numériques de M. Cayley, où leur nombre est désigné par β ; les propriétés des sections planes passant par ces points, celles de la courbe double, etc., leur sont plus ou moins familières ; mais je crois que souvent on ne se forme pas une image distincte et complète de ces différentes propriétés. C'est cette image que donne le modèle III. Il illustre en même temps les propriétés de situation de la classe importante de points cuspidaux de la courbe cuspidale d'une surface courbe générale dont on désigne aussi le nombre par β, dans les formules numériques de Salmon et Cayley pour une surface algébrique non développable ; car ces propriétés de situation ne diffèrent pas essentiellement de celles des points β d'une surface développable.

Le modèle III met sous les yeux ces propriétés connues (1) ; on y voit immédiatement la branche simple de la courbe double, qui a au point β la même tangente que l'arête de rebroussement, et l'on s'imagine, sans aucune difficulté, en continuation de cette branche une courbe isolée, mais réelle, formée par l'intersection de deux nappes imaginaires ; on voit qu'une section plane qui tend à passer par le point β a un point double et deux points cuspidaux qui tendent à coïncider et à former un point triple à une seule tangente, et que les deux points cuspidaux deviennent ensuite imaginaires pendant que le point double devient un point isolé. On voit que la section faite à une surface développable par un plan passant par la génératrice en un

(1) Voir, pour les propriétés des points β d'une surface développable, la traduction allemande de la *Teoria delle superficie,* de Cremona, p. 86 et suivantes, ou l'introduction de mon *Mémoire sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable*, dans les *Annali di Matematica,* 2e série, t. III, notamment la table, et, pour une surface non développable, les déductions dans mon *Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques* qui ont égard aux plans β'. (*Mathematische Annalen,* t. X, pp. 466-467.) En effet. les propriétés des points β en résultent par le principe de dualité.

point β est composée de cette génératrice et d'une branche double formant un point de rebroussement de seconde espèce, et l'on comprend que, pour la section faite à une surface non développable par un plan passant par la tangente à la courbe cuspidale en un point β, la génératrice est seulement remplacée par une branche courbe, mais simple ; on voit que la section faite à la surface développable, par le plan tangent en un point β, se compose de la génératrice prise deux fois et d'une branche double formant un point cuspidal, et l'on comprend que la section analogue d'une surface non développable est composée de deux branches doubles formant des points cuspidaux et tangentes l'une à l'autre, etc..... En regardant aussi les dernières classes de sections comme des limites de sections faites par des plans mobiles, on voit comment leurs singularités composées résultent de la coïncidence de singularités plus simples.

Le modèle II représente les propriétés de situation des points de contact des plans (α) qui correspondent selon le principe de dualité aux points β, c'est-à-dire des plans qui rencontrent l'arête de rebroussement en quatre points consécutifs, et qui contiennent trois génératrices consécutives de la surface développable (1). Indirectement, il illustre aussi les propriétés des points d'intersection de la courbe double avec la courbe cuspidale d'une surface courbe non développable.

On n'a pas si grand besoin d'un modèle représentant un point double de l'arête de rebroussement, car les deux parties de la surface développable qui y passent sont indépendantes entre elles et ont, l'une et l'autre, les mêmes propriétés qui caractérisent un point ordinaire de la développable. Les auteurs ont donc préféré de construire un modèle (n° IV) représentant un point d'inflexion de la courbe cuspidale. Bien que cette singularité ne soit ordinaire ni à une surface développable regardée comme enveloppe d'une suite de plans, ni à

(1) Pour les propriétés de ces plans et points, voir les deux premiers endroits cités dans la note précédente.

une développable engendrée par les tangentes d'une courbe représentée par des équations en coordonnées ponctuelles, elle devient, selon une remarque qui nous est communiquée par M. Lie, une singularité ordinaire, si on la regarde au point de vue de la géométrie linéaire de l'espace. Il faut donc approuver le choix des auteurs à cet égard, mais nous n'insisterons pas ici sur les intéressantes propriétés, correspondant entre elles par le principe de dualité, de ces points singuliers (1).

Ayant parlé ici de l'usage que les savants et les étudiants qui s'occupent particulièrement de la théorie des surfaces peuvent faire des modèles, je n'ai besoin de rien ajouter sur le parti qu'on peut en tirer, dans l'instruction, pour donner aux élèves une idée nette des propriétés principales des surfaces développables. Je me bornerai à la remarque que les étudiants auront sans doute un moyen utile de se familiariser avec les propriétés des surfaces développables si, ne se bornant pas à considérer les modèles finis, ils découpent eux-mêmes les figures dessinées et les composent ensuite d'après les règles données par les auteurs.

(1) Voir les endroits cités dans les notes précédentes.

Paris. — Typographie Georges Chamerot, rue des Saints-Pères, 19. — 6345.